Étude de fonction

1. Pourquoi étudier une fonction ?

Le but premier d'une étude de fonction est le tracé de sa courbe. Même si les outils modernes (calculatrice, ordinateur) permettent aisément ce tracé, il n'est pas certain que le résultat affiché corresponde à la réalité. Je m'explique : un outil informatique tracera toujours une courbe en calculant un grand nombre de points, mais rien ne permet d'affirmer qu'il n'oubliera pas une variation plus fine que son plus petit pas de calcul.

2. Les différentes étapes d'une étude de fonction

Une étude de fonction se décompose en un certain nombre d'étapes qui suivent toujours le même ordre :

— si la fonction est périodique, la détermination de la période et le choix de l'intervalle d'étude à partir de cette période ;
— la recherche de l'ensemble de définition ;
— la recherche d'une parité qui, si elle existe, permet de réduire l'intervalle d'étude à une partie seulement de l'ensemble de définition ;
— la recherche des limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
— l'écriture des équations des asymptotes (verticales, horizontales et obliques) ;
— le calcul de la dérivée ;
— l'établissement du tableau de variations ;
— la recherche des points d'inflexion ;
— l'établissement d'une table des valeurs où seront retranscrites les coordonnées de quelques points remarquables pour aider au tracé de la courbe ;
— et donc le tracé de la courbe qui se trouve grandement facilité par les informations recueillies précedemment.

3. Période de la fonction

Bien que l'on puisse imaginer et créer une infinité de fonctions périodiques, celles intervenant dans les études de fonctions au lycée sont trigonométiques :

— sinus et cosinus qui ont pour période 2π ;
— tangente de période π.

Si ces fonctions se présentent sous la forme « simple » $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ (par exemple), on peut en déduire immédiatement que l'intervalle d'étude est $[0; 2\pi]$ ou encore $[-\pi; \pi]$ (l'important est qu'il s'étende sur 2π).

Bien souvent, l'argument des fonctions trigonométriques est plus complexe. Considérons ainsi la fonction f définie par $f(x) = \cos(3x + 2)$. Ici, il me faut écrire :

$$\begin{array}{cccccc} & -\pi & \leq & 3x+2 & \leq & \pi \\ \Leftrightarrow & -\pi-2 & \leq & x & \leq & \pi-2 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\pi+2}{3} & \leq & x & \leq & \frac{\pi-2}{3} \end{array}$$

Ainsi, l'intervalle d'étude devient $[-\frac{\pi+2}{3}; \frac{\pi-2}{3}]$.

4. Ensemble de définition

Rechercher l'ensemble de définition consiste à trouver l'intervalle où la fonction est définie, c'est-à-dire où ne se trouve aucune valeur interdite. Certaines fonctions présentent en effet des valeurs interdites, c'est-à-dire des valeurs pour lesquelles on ne peut calculer une image. Par exemple, la fonction racine carrée ne peut être calculée pour tous les nombres strictement négatifs. Pour s'en convaincre, on peut par exemple demander à une calculatrice de nous donner la racine carrée de -5 : elle nous répondra par un message du genre *Error*.

Seules quatre règles simples sont à retenir pour déterminer un ensemble de définition :

- on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif ;
- on ne peut pas diviser par zéro ;
- l'argument d'un logarithme doit être strictement positif ;
- un nombre négatif ne peut être élevé à une puissance non entière négative ; ceci vient du fait que pour tout y qui n'est pas un entier relatif : $x^y = e^{yln(x)}$.

Cette dernière règle me dit que je peux calculer par exemple $(-5)^{-2}$ (la calculatrice me donne $0,04$, car c'est en effet $\frac{1}{25}$), mais en aucun cas $(-5)^{-2,5}$.

Et la première règle peut se généraliser en disant que l'on ne peut calculer la racine n-ième d'un nombre négatif pour n pair. Ainsi, l'écriture $\sqrt[3]{-125} = -5$ est autorisée, mais pas $\sqrt[4]{-125}$.

Voyons un exemple pratique pour illustrer ces règles : soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$.

Étant donné que l'argument d'un logarithme ne peut être négatif ou nul, il faut que :

$$\begin{array}{rccc} & x-3 & > & 0 \\ \Leftrightarrow & x & > & 3 \end{array}$$

Ceci me donne un premier intervalle $]3; +\infty[$. Ensuite, il faut que l'expression sous la racine soit supérieure (ou égale) à zéro :

$$\begin{array}{rccc} & x-4 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 4 \end{array}$$

J'en déduis le second intervalle : $[4; +\infty[$. Il faut encore que je considère la fraction qui apparaît dans l'expression de f. Son dénominateur ne devant jamais s'annuler, j'écris :

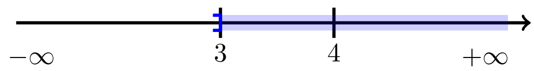
$$\begin{array}{rccc} & \sqrt{x-4} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x-4 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & 4 \end{array}$$

Veuillez noter que dans le passage de la première à la seconde ligne, je peux conserver le signe d'équivalence en élevant les deux membres au carré, car ils sont tous deux positifs.

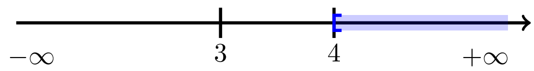
Je vois que je dois exclure 4 de l'ensemble de définition, car il annule le dénominateur. Ceci revient à considérer l'intervalle $]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$.

J'ai donc maintenant à ma disposition trois intervalles. Étant donné que je ne peux calculer une valeur de ma fonction que pour les nombres appartenant à chacun de ces trois intervalles (par exemple 4 appartenant aux deux premiers, mais pas au dernier, doit être exclu), je vais réaliser l'intersection de ces intervalles. Ceci me conduira à l'ensemble de définition. Pour ce faire, je peux représenter chaque intervalle sous forme graphique :

$]3;+\infty[$



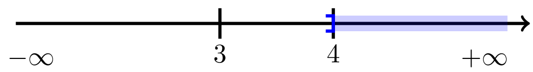
$[4;+\infty[$



$]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$

Notez bien le sens des crochets : pour le premier graphique, 3 est exclu de l'intervalle, et pour le second, 4 est inclus. Et au final, je trouve l'ensemble de définition D_f en réalisant l'intersection des intervalles précédents :

$D_f =]4;+\infty[$



Avant de conclure cette partie, juste un mot sur un cas très particulier à prendre en considération : le nombre 0^0. Les mathématiciens débattent de ce nombre depuis des siècles et ils ne sont toujours pas tombés d'accord ! Pour certains, il vaut 1 et pour d'autres 0. Par conséquent, il est sage d'exclure ce nombre d'un ensemble de définition si jamais il venait à y apparaître (c'est le cas par exemple de la fonction définie par $f(x) = x^x$).

5. Parité

Certaines fonctions peuvent être paires, d'autres impaires et d'autres encore ni paires ni impaires, ces dernières étant majoritaires dans les fonctions rencontrées au lycée !

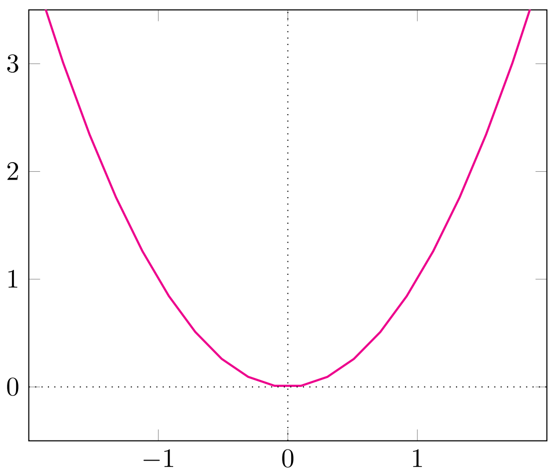
Une fonction paire est une fonction telle que pour tout x de son ensemble de définition : $f(-x) = f(x)$. Il en découle que l'ensemble de définition doit être symétrique par rapport à l'origine.

Une fonction impaire est telle que : $f(-x) = -f(x)$, l'ensemble de définition devant également être symétrique par rapport à l'origine.

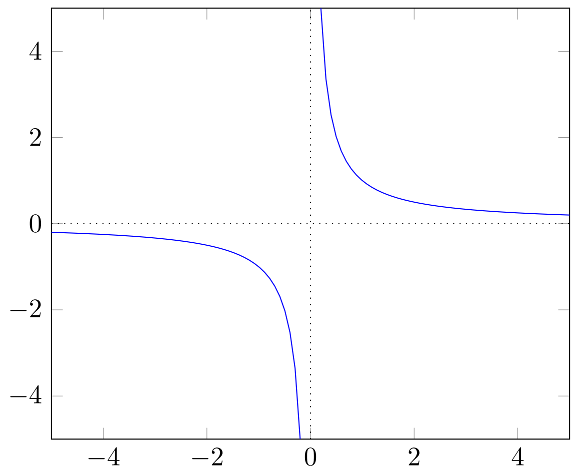
Une fonction paire a sa courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que pour une fonction impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Ainsi, puisque le but de l'étude d'une fonction est le tracé de sa courbe, je peux diviser par deux l'intervalle d'étude et déduire le restant de la courbe par symétrie. Prenons deux exemples.

La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est clairement paire. Son ensemble de définition étant $\mathbb{R}$, je peux réduire l'intervalle d'étude à $[0;+\infty[$.

La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire. Son ensemble de définition est $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}^*$). Je peux donc limiter son étude à l'intervalle $]0;+\infty[$.



$f(x) = x^2$



$f(x) = \frac{1}{x}$

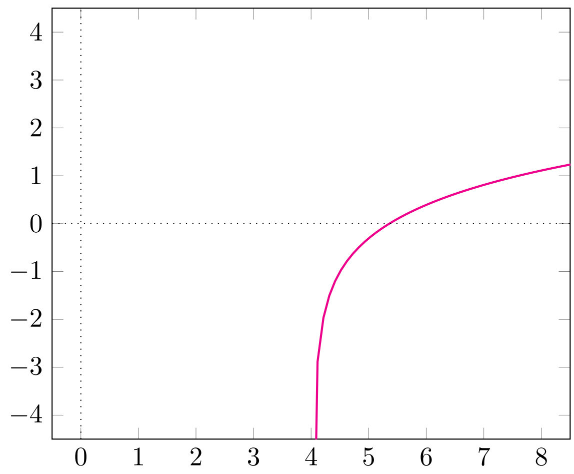
6. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Les fonctions ont souvent un comportement « spécial » lorsqu'elles s'approchent des bornes de leur ensemble de définition. Pour cette raison, il est intéressant de rechercher les limites correspondantes. De plus, celles-ci me seront utiles lorsque j'aurai à remplir le tableau de variations. Reprenons le cas de la fonction f vue précédemment et définie par $f(x) = \ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$. Sachant que son ensemble de définition est $D_f =]4; +\infty[$, on cherche et on trouve les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Vous pourrez noter que j'ai calculé la limite à droite de 4 (on peut aussi dire « par valeurs supérieures ») : cela est indiqué par la présence du symbole $>$. La raison en est que la fonction n'est pas définie pour les valeurs inférieures ou égales à 4.

On déduit de ces deux limites que tout d'abord, la courbe de f va « descendre fortement » lorsqu'elle se rapprochera de 4 et que d'autre part, elle « montera » au fur et à mesure que x deviendra de plus en plus grand. Ceci est confirmé par le graphique de la fonction :



$f(x) = \ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

7. Équations des asymptotes

Les asymptotes donnent des informations supplémentaires qui me faciliteront le tracé de la courbe. Il est donc intéressant d'obtenir leurs équations.

Si elles existent, les équations des asymptotes horizontales et verticales s'obtiennent grâce aux limites aux bornes de l'ensemble de définition. En effet :

Si il existe a tel que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

alors la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = a$.

De même, s'il existe b tel que :

$$\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

ou

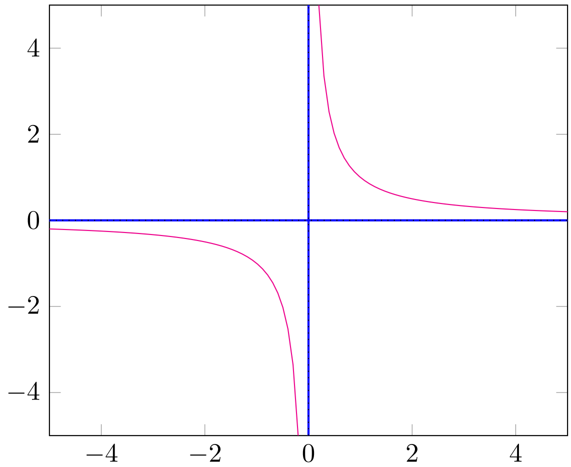
$$\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$$

alors la courbe de f admet l'asymptote verticale d'équation $x = b$.

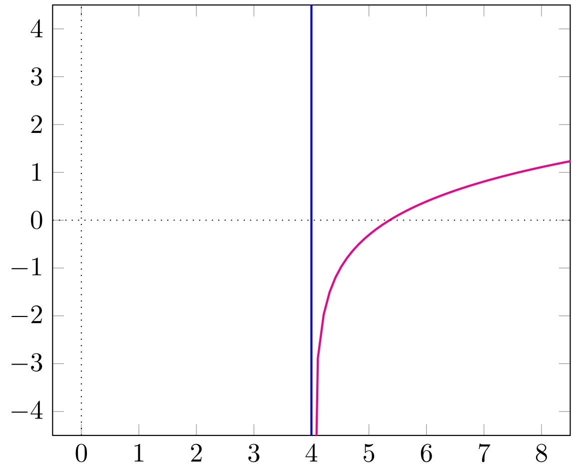
La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et vue précédemment admet ainsi l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ainsi que d'ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$).

Elle admet de plus l'asymptote verticale d'équation $x = 0$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ (et également $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$).

Quant à notre fonction f définie par $f(x) = ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$, elle admet l'asymptote verticale d'équation $x = 4$, car $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = -\infty$ (c'est ce que j'avais décrit de manière qualitative mais non rigoureuse par « la courbe de f va descendre fortement lorsqu'elle se rapprochera de 4 »).



$f(x) = \frac{1}{x}$ et ses asymptotes



$f(x) = ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ et son asymptote

Les équations des asymptotes obliques (si elles existent) ne se déduisent pas immédiatement des limites aux bornes : elles nécessitent quelques calculs supplémentaires. La première condition pour qu'au moins une asymptote oblique existe est que l'une au moins des propositions suivantes soit vraie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Dans la suite, je vais supposer que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Il faut alors calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe et qu'elle est finie, on la note a. Il faut alors encore calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$. Si cette seconde limite existe également et qu'elle est finie, on la note b. Alors la courbe de f admet en $+\infty$ l'asymptote oblique d'équation :

y=ax+b

Le même raisonnement peut être fait pour rechercher l'existence d'une asymptote oblique en $-\infty$.

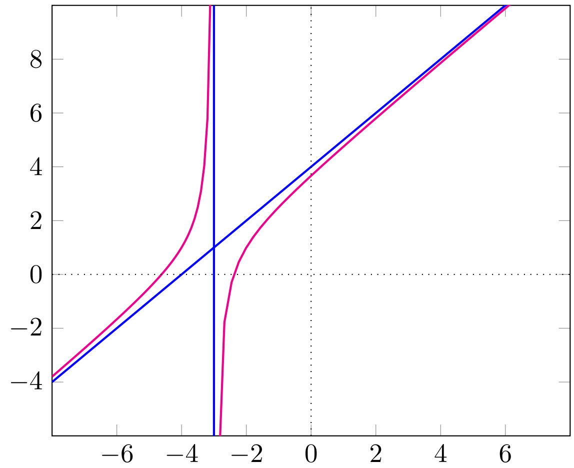
À titre d'exemple de ce dernier cas, considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+7x+11}{x+3}$. On trouve successivement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 4$$

Elle admet donc l'asymptote oblique d'équation $y = x+4$ en $+\infty$. On pourra noter que l'on a aussi :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 4$$

Par conséquent, la même droite est également une asymptote en $-\infty$. Ceci se voit sur le graphique :



$f(x) = \frac{x^2+7x+11}{x+3}$ et ses asymptotes

J'ai également tracé la droite d'équation $x = -3$, car il s'agit d'une asymptote verticale. En effet :

$$\lim_{\substack{x\to-3\\>}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}} f(x) = +\infty$$

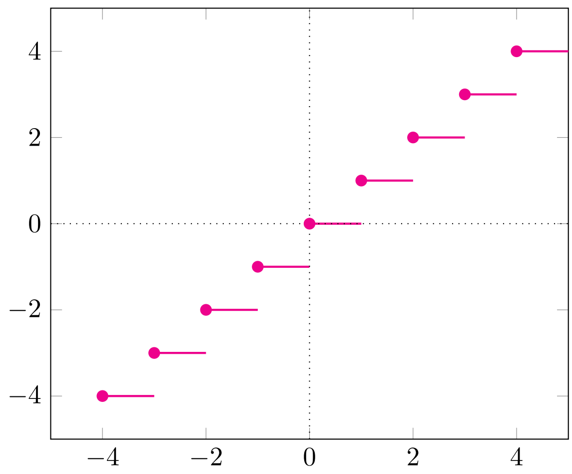
8. Calcul de la dérivée

Le calcul de la dérivée est le prélude à l'établissement du tableau de variations. Comme vous le savez certainement, il existe des formules pour le calcul des dérivées. Avant de les aborder, je vais revenir sur deux définitions. La première est la définition de la continuité. En effet, pour qu'une fonction soit dérivable en x_0, il faut qu'elle soit continue en x_0 (il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante). On dit que f est continue en x_0 si :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ainsi, la fonction partie entière, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (anciennement notée $f(x) = E(x)$) n'est pas dérivable en 1, car :

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \lfloor x \rfloor = 1$$
$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} \lfloor x \rfloor = 0$$



$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (les points appartiennent à la courbe)

Si la fonction est continue en x_0, alors elle est dérivable en x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}$$

On note alors cette limite $f'(x_0)$. Les mathématiciens ont établi (et démontré !) des formules pour nous permettre de calculer facilement toutes sortes de dérivées. Le tableau suivant les résume :

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x	1	ku	ku'
x^n	nx^{n-1}	$u+v$	$u'+v'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
e^x	e^x	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos(ax+b)$	$-\arcsin(ax+b)$	$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\sin(ax+b)$	$\arccos(ax+b)$	e^u	$u'e^u$
$\tan(ax+b)$	$a[1+\tan^2(ax+b)] = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
		$u \circ v(x) = u(v(x))$	$v'(x) \cdot u'(v(x))$

À titre d'exemple, la fonction f définie par $f(x) = ln(x-3) - \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2(\sqrt{x-4})^3} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2(x-4)^{\frac{3}{2}}}$.

9. Tableau de variations

Le tableau de variations se construit très simplement en sachant que :

— si sur un intervalle I $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;

— si sur un intervalle I $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Si je considère par exemple à nouveau la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+7x+11}{x+3}$, sachant que son dénominateur doit être non nul, elle est définie sur $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$, dérivable sur ce même intervalle et sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$.

Par conséquent, pour déterminer le signe de $f'(x)$, son dénominateur étant toujours positif, il me suffit d'étudier le signe du trinôme $x^2 + 6x + 10$. Je commence par calculer son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4$. Ce discriminant étant strictement négatif, j'en déduis que $f'(x)$ est toujours du signe de a, c'est-à-dire positif. Il s'en suit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

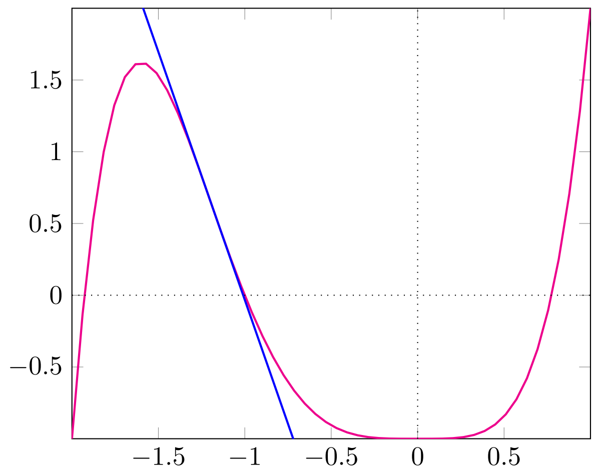
J'ai retranscrit dans le tableau les diverses limites de f que nous avons déjà croisées.

Veuillez bien noter que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -3[$ et $]-3; +\infty[$, mais en aucun cas sur $\mathbb{R}$ entier (c'est comme si la double barre « cassait » l'intervalle en deux). C'est ce que l'on peut observer sur le graphique de f tracé précédemment.

10. Points d'inflexion

Pour qu'une fonction présente un point d'inflexion en un point, il faut que sa dérivée seconde change de signe en ce point. Si je considère par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^5 + 2x^4 - 1$, sa dérivée première est $f'(x) = 5x^4 + 8x^3$ et sa dérivée seconde $f''(x) = 20x^3 + 24x^2 = 4x^2(5x + 6)$. Cette dernière change de signe pour $x = \frac{-6}{5}$. Vous pourrez noter que la dérivée seconde s'annule également en ce point, ce qui est logique puisque qu'elle change de signe. Elle s'annule également en $x = 0$ et ceci par contre ne se traduit pas par un point d'inflexion, car le signe ne change pas dans ce second cas.

Les points d'inflexion entraînent une « allure particulière » de la courbe, comme le montre le graphique de f :



$f(x) = x^5 + 2x^4 - 1$

En effet, la tangente (en bleu) traverse la courbe au point d'inflexion, ce qui donne une information supplémentaire pour le tracé de cette dernière. La fonction change en effet de convexité au point d'inflexion. Pour rappel :

— si les tangentes sur un intervalle I sont toutes situées au-dessus de la courbe d'une fonction f, alors f est concave sur I ;
— si les tangentes sur un intervalle I sont toutes situées en-dessous de la courbe d'une fonction f, alors f est convexe sur I.

Comme vu précédemment, la dérivée seconde s'annule aussi en 0, mais ce point n'est pas un point d'inflexion, car la courbe est convexe avant et après celui-ci.

Autre rappel : l'équation de la tangente en un point de coordonnées (x_0,y_0) de la courbe de f s'obtient par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

11. Étude complète

Afin de faire une étude complète, on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x+2}$.

Puisque le dénominateur doit être non nul, l'ensemble de définition est :

$$Df =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[\text{ (que l'on peut aussi écrire } \mathbb{R}\backslash\{-2\})$$

Concernant les limites aux bornes de l'intervalle de définition, on trouve :

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ceci nous montre immédiatement que la droite D_1 d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale. Il nous reste à voir l'existence d'asymptotes obliques. On trouve successivement :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = 2$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - x = 2$$

Par conséquent, la droite D_2 d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

Pour établir le tableau de variations, on calcule la dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

Le dénominateur de f'(x) étant toujours positif, il nous faut étudier le signe du trinôme x^2+4x+7. On calcule donc son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 7 = 16 - 28 = -12$. Étant donné que ce dernier est toujours négatif, le trinôme est de signe constant et du signe de a. C'est-à-dire qu'il est toujours positif. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

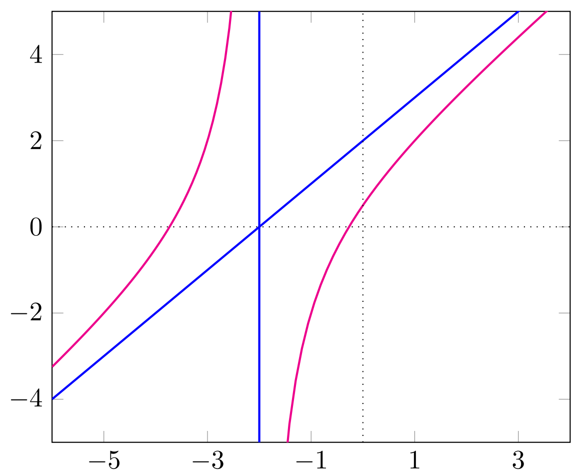
Ce tableau nous montre que la courbe traverse deux foix l'axe des abscisses. Il est intéressant de connaître l'abscisse de ces deux points d'intersection pour le tracé. Pour les trouver, il nous faut résoudre l'équation $f(x) = 0$ qui se simplifie en $x^2 + 4x + 1 = 0$. Les formules de résolution des équations du second degré nous donnent successivement :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 = 12 > 0$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3} - 2$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} - 2$$

On obtient ainsi la table des valeurs :

x	$-\sqrt{3} - 2 \approx -3,73$	$\sqrt{3} - 2 \approx -0,267$
$f(x)$	0	0

Nous avons maintenant toutes les informations pour nous faciliter le tracé :



$f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x+2}$

12. Conclusion

Nous avons vu que l'étude d'une fonction, dans le but de tracer sa courbe, peut se faire aisément si l'on suit la méthode que nous avons exposée. Pour vous aider dans la vérification de votre travail, le site lovemaths.fr réalisera pour vous dans les grandes lignes l'étude de la plupart des fonctions que vous pourrez rencontrer au lycée.