

# LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

- Cas particulier des limites de suites:
  - si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  (L réel),  $u_n$  **converge**
  - si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ,  $u_n$  **diverge**
  - si  $u_n$  n'admet pas de limite (ex :  $u_n = \sin(n)$ ),  $u_n$  **diverge**

- 4 limites indéterminées : " $(+\infty)+(-\infty)$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{0}{0}$ "

- En  $+\infty$  ou  $-\infty$ , un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$


Exemples:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$$

- En  $+\infty$  ou  $-\infty$ , une fonction rationnelle a même limite que le rapport de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^p}$$

Exemple:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$

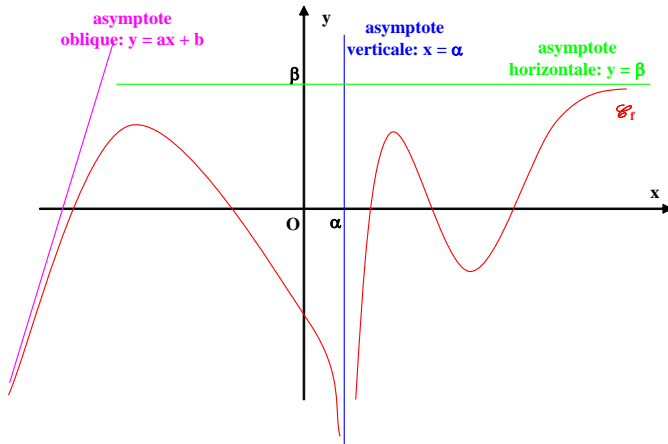
- Théorème des gendarmes: 

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } f(x) < g(x) < h(x) \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

- Limites composées: 
$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lambda \\ \text{et si } \lim_{X \rightarrow \lambda} g(X) = l \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} g \circ f(x) = l$$



- Asymptotes :



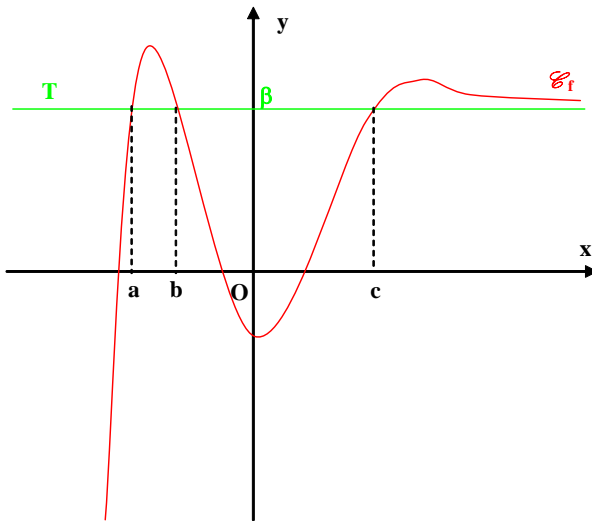
### A retenir

Asymptote horizontale d'équation  $y = \beta$  si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \beta$

Asymptote verticale d'équation  $x = \alpha$  si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm\infty$

Asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

- Position relative de l'asymptote  $T$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$  :



### A retenir

On calcule  $f(x) - y_T$

On étudie son signe :

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$		
$f(x) - y_T$	-	○	+	○	-	○	+

Si  $f(x) - y_T > 0$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $T$

Si  $f(x) - y_T < 0$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $T$

$\mathcal{C}_f$  au-dessus de  $T$  sur  $[a;b] \cup [c;+\infty[$

$\mathcal{C}_f$  au-dessous de  $T$  sur  $]-\infty;a] \cup [b;c]$

