

LIMITES ET ASYMPTOTES

- 4 limites indéterminées : " $(+\infty)+(-\infty)$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{0}{0}$ "
- En $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$


Exemples: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$$

- En $+\infty$ ou $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le rapport de ses termes de plus haut degré :

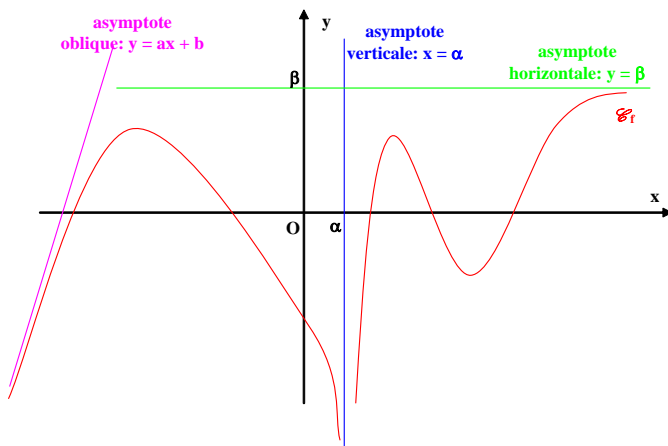
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^p}$$

Exemple: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$

- Théorème des gendarmes:  Si $f(x) < g(x) < h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$
- Limites composées: Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lambda$ et si $\lim_{X \rightarrow \lambda} g(X) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g \circ f(x) = l$



- Asymptotes :



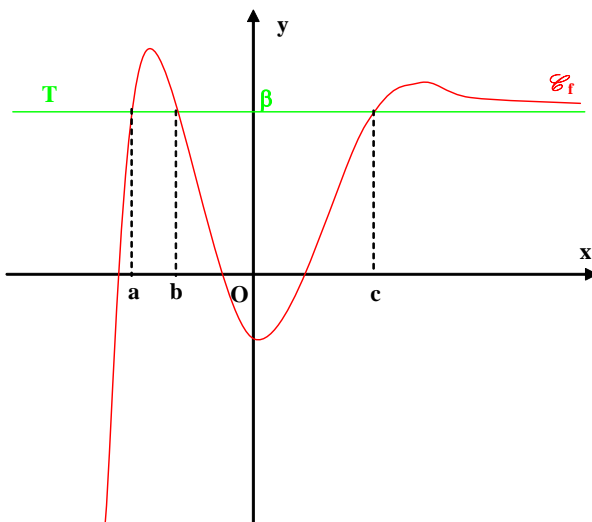
A retenir

Asymptote horizontale d'équation $y = \beta$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \beta$

Asymptote verticale d'équation $x = \alpha$ si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm\infty$

Asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

- Position relative de l'asymptote T et de la courbe \mathcal{C}_f :



A retenir

On calcule $f(x) - y_T$

On étudie son signe :

| x | $-\infty$ | a | b | c | $+\infty$ | | |
|--------------|-----------|---|---|---|-----------|---|---|
| $f(x) - y_T$ | - | ○ | + | ○ | - | ○ | + |

Si $f(x) - y_T > 0$, \mathcal{C}_f est au-dessus de T

Si $f(x) - y_T < 0$, \mathcal{C}_f est au-dessous de T

\mathcal{C}_f au-dessus de T sur $[a; b] \cup [c; +\infty[$

\mathcal{C}_f au-dessous de T sur $] -\infty; a[\cup [b; c$

