# Résolution de $\frac{5\left(x^4+3\,x^2-1\right)}{6} = 0$

$\frac{5\left(x^4+3\,x^2-1\right)}{6} = 0$ se ramène à une équation du quatrième degré de la forme $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ avec :

$$\begin{array}{rcr} a & = & \frac{5}{6} \\ b & = & 0 \\ c & = & \frac{5}{2} \\ d & = & 0 \\ e & = & -\frac{5}{6} \end{array}$$

Il s'agit d'une équation bicarrée. On pose donc $X = x^2$.

Ceci nous amène à l'équation : $\frac{5\,X^2}{6} + \frac{5\,X}{2} - \frac{5}{6} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (\frac{5}{2})^2 - 4(\frac{5}{6})(-\frac{5}{6}) = \frac{325}{36} \simeq 9,03 > 0$.

Cette équation du second degré admet donc deux solutions :

$$\begin{array}{rcccccr} X_1 & = & \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & = & -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2} & \simeq & -3,30 \\ X_2 & = & \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & = & \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2} & \simeq & 0,303 \end{array}$$

Puisque $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$, on en déduit les solutions réelles :

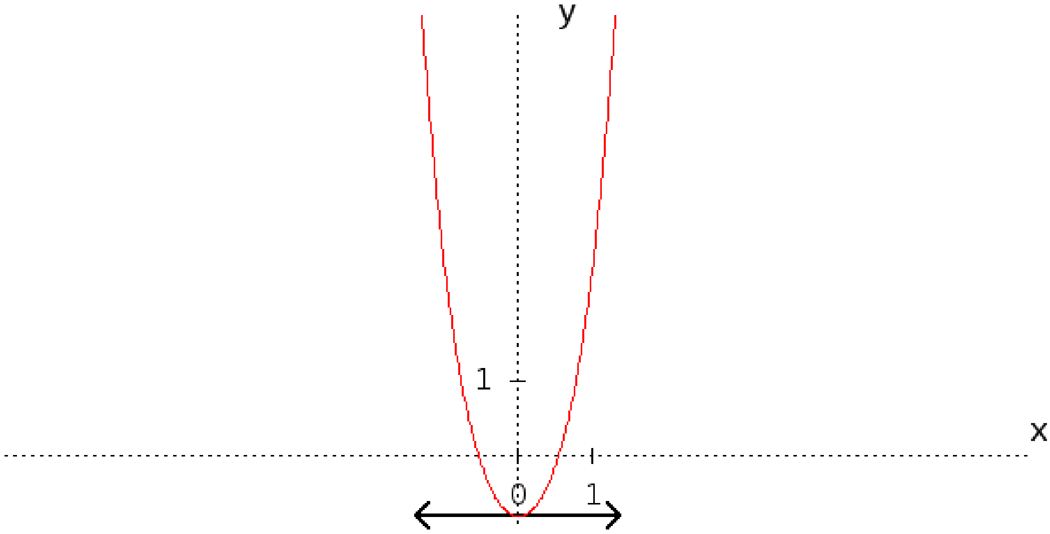
$$\begin{array}{rcccccr} x_1 & = & \sqrt{X_2} & = & \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}} & \simeq & 0,550 \\ x_2 & = & -\sqrt{X_2} & = & -\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}} & \simeq & -0,550 \end{array}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est donc : $S = \{-\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}}\}$.

Graphiquement, la courbe d'équation $y = \frac{5\,x^4}{6} + \frac{5\,x^2}{2} - \frac{5}{6}$ coupe deux fois l'axe des abscisses, aux points d'abscisse $x_1$ et $x_2$.



lovemaths.fr




Pour une visualisation dynamique de la courbe cliquez ici : http://www.lovemaths.fr/curve.html (puis acceptez de tourner l'application java).

En considérant les solutions complexes, on trouve dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{rcccccr} x_1 & = & \sqrt{X_2} & = & \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}} & \simeq & 0,550 \\ x_2 & = & -\sqrt{X_2} & = & -\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}} & \simeq & -0,550 \\ x_3 & = & i\sqrt{-X_1} & = & \frac{\sqrt{\sqrt{13}+3}\,i}{\sqrt{2}} & \simeq & 1,82i \\ x_4 & = & -i\sqrt{-X_1} & = & -\frac{\sqrt{\sqrt{13}+3}\,i}{\sqrt{2}} & \simeq & -1,82i \end{array}$$

Donc $S = \{\frac{\sqrt{\sqrt{13}+3}\,i}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{\sqrt{13}+3}\,i}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{\sqrt{2}}\}$ .

<u>Note</u> : ces résultats ont été obtenus par un programme automatique : leur exactitude n'est pas garantie.